Оглавление

[Вероятностные характеристики случайного процесса 1](#_Toc512153597)

[Математическим ожиданием 1](#_Toc512153598)

[Геометрически мат ожидание случайного процесса 1](#_Toc512153599)

[Дисперсией случайного 1](#_Toc512153600)

[Корреляционная функция. 1](#_Toc512153601)

[Случайные процессы называют стационарными 1](#_Toc512153602)

[Понятие Марковского случайного процесса. Цепь Маркова. 1](#_Toc512153603)

[Случайный процесс, протекающий в некоторой системе называется Марковским 1](#_Toc512153604)

[Марковский случайный процесс с дискр. сост-ми и дискр. 1](#_Toc512153605)

[Переходными вероятностями 1](#_Toc512153606)

[Марковскую цепь называют однородной 1](#_Toc512153607)

[Матрицей перехода за один шаг 1](#_Toc512153608)

[Равенство Маркова 1](#_Toc512153609)

[Теорема: 1](#_Toc512153610)

[Классификация состояний Марковской цепи. Предельные вероятности состояний 1](#_Toc512153611)

[Теорема 1](#_Toc512153612)

[Процессы «гибели и размножения» 2](#_Toc512153613)

[Непрерывная марковская цепь называется процессом гибели и размножения 2](#_Toc512153614)

[Простейший поток заявок 4](#_Toc512153615)

[Случайным потоком называется последовательность 5](#_Toc512153616)

[Достаточное условие эргодичности. 5](#_Toc512153617)

[Состояние Sj называют достижимым 5](#_Toc512153618)

[Цепь Маркова называют неприводимой 5](#_Toc512153619)

[Состояние Si называют возвратным 5](#_Toc512153620)

[Эргодическим состоянием 5](#_Toc512153621)

[Эргодическая Марковская цепь 5](#_Toc512153622)

[Состояние Si называют поглощающим 5](#_Toc512153623)

[Теорема: 5](#_Toc512153624)

ТМО

# Вероятностные характеристики случайного процесса

Математическим ожиданием случайного процесса называется неслучайная функция, m(t), которая при каждом значении аргумента t равна мат ожиданию соответствующего сечения случайной функции.

(рисунок)

Геометрически мат ожидание случайного процесса можно истолковать как среднюю кривую около которой расположены другие кривые – реализации. При фиксированном значении аргумента Мат ожидание – есть среднее значение сечения.

Опр.

Дисперсией случайного процесса называют неслучайную неотрицательную функцию D(t), значение которой для каждого аргумента t равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции.

Дисперсия характеризует степень рассеивания возможных реализаций вокруг мат ожидания случайного процесса.

При фиксированном значении аргумента дисперсия характеризует степень рассеивания возможных значений сечения вокруг математического ожидания сечения.

Часто вместо дисперсии рассматривают среднее квадратическое отклонение случайного процесса: Сигма х (t) = размерности случайного процесса, значения реализаций случайного процесса при каждом t отклоняются от мат ожидания на величину порядка сигма х (t).

Мат ожидание и дисперсия являются важнейшими характеристиками случайного процесса, однако данных характеристик недостаточно, для описания основных особенностей случайного процесса.

Рассмотрим два случ процесса Х(t) и y(t), построенные так, чтобы имели схожие мат ожидания и дисперсии. (рисунок)

У случайных процессов Х(t) и У(t) примерно одинаковые мат ожидания и дисперсии, однако характер этих случайных процессов резко различен. Для случайного процесса Х(t) характерно плавное, постепенное изменение. Случайная функция У(t) имеет резко колебательный характер с неправильными беспорядочными колебаниями. Для такого случайного процесса характерно быстрое затухание зависимости между его значениями по мере увеличения расстояния по t между ними.

Очевидно, что внутренняя структура обоих случайных процессов совершенно различна, но это различие не улавливается не мат ожиданием, не дисперсией.

## Корреляционная функция.

Чтобы охарактеризовать структуру случайного процесса (изменчивость реализации во времени) необходимо ввести характеристику зависимости (**корреляции**) двух сечений случайного процесса. Эта характеристики называется **Корреляционной функцией**.

Пусть имеется случайный процесс x(t). Построим график случайного процесса. (рисунок)

Корреляционная функция случайного процесса характеризует степень статистической связи между сечениями x(t1) и x(t2), относящимися к разным моментам времени t1 и t2.

Опр.

**Корреляционной функцией** случайного процесса называется неслучайная функция Kx(t1\*t2), которая для каждой пары моментов времени t1, t2 равна мат ожиданию произведения соответствующих сечений X(t1) и X(t2): Kx(t1,t2)- Dx

Свойства корр функции:

1. При равных аргументах t1=t2 корреляционная функция обращается в дисперсию случайной функции. K(t1,t1)=D(t1)
2. Корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов. K(t1,t2)=K(t2,t1)

Корреляционная функция зависит от дисперсии. Если процесс весьма мало отклоняется от своего мат ожидания, то корреляционная функция будет мала, независимо от степени связи между функциями.

Для количественной характеристики степени зависимости между сечениями вводят безразмерную величину, называемую нормированной корреляционной функцией.

R(t1,t2)= K(t1,t2)/ (сигма(t1)\* сигма(t2))

Нормированная корреляционная функция при фиксированных значениях аргументов представляет собой коэффициент корреляции соответствующих сечений случайного процесса.

Свойства нормированной корр функции:

1. По модулю его значения не превышают единицу. |R(t1,t2)|<=1
2. При равных значениях аргумента его значение равно единице.
3. R(t1,t2)=R(t2,t1)

Следствие из св(1):  
1) Если коэф корреляции =0, то сечения Х(t1) и X(t2) - независимые случайные величины.   
Если коэф корреляции =1, то между сечениями линейная зависимость.

2) Линейная вероятностная зависимость случайных величин Х(t1) и X(t2) заключается в том, что при возрастании одной случайной величины другая, имеет тенденцию возрастать или убывать по линейному закону.

3) В остальных случаях коэф корреляции -1>r>1.

В этом случае говорят, что случайные величины Х(t1) и X(t2) связаны между собой положительной корреляцией, если 0<r<1, в случаях -1<r<0 – отрицательной корреляцией.

**Положительная корреляция** между случайными означает, что при возрастании одной из них, другая имеет тенденции в среднем возрастать.

**Отрицательная корреляция** означает, что при возрастании одной из случайных величин, другая имеет тенденцию в среднем убывать.

Чем ближе |r(t1,t2)| к единице, тем больше оснований считать, что случайные величины Х(t1) и X(t2) связаны линейной зависимостью.

На практике очень часто встречаются случайные процессы, протекающие во времени приблизительно однородно. Эти процессы можно рассматривать как продолжающиеся во времени неопределенно долго. При их исследовании в качестве начала отсчета можно выбрать любой момент времени. Такие случайные процессы называют **стационарные.**

Случайные процессы называют стационарными**,** если все его вероятностные характеристики не меняются при любом изменении аргумента, т.е.:

1. M(t)=m=const
2. D(t)=D=const
3. K(t,t+T)=k(T)

При Т=0 k(t,t)=D(t)=k(0)=const

Условие 3 есть единственное существенное условие, которому должная удовлетворять стационарная случайная функция.

Так как корреляционная функция обладает свойствами симметрии, то K(t,t+T)=K(t+T,t) отсюда K(T)=K(-T) – четная функция. Поэтому обычно корреляционную функцию определяют только для положительных значений аргумента.

# Понятие Марковского случайного процесса. Цепь Маркова.

По характеру случайного процесса, протекающего в системе массового обслуживания, различают система марковские и не марковские. Исследование СМО значительно упрощается, если в ней протекает марковский случайный процесс.

*ОПР.*

Случайный процесс, протекающий в некоторой системе называется Марковским или процессом без последействия, если для каждого момента времени поведение системы в будущем зависит только от состояния системы в данный момент времени и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние. Иными словами в марковских случайных процессах будущее состояние целиком определяется его настоящим состоянием, прошлое на него никак не влияет. Это свойство называется **СВОЙСТВОМ ОТСУТСТВИЯ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ** или **МАРКОВСКИМ СВОЙСТВОМ.**

Пусть имеется некоторая система S, которая может находиться в состояниях S1, S2,…, Sn. Пусть переходы системы из одного сост. в другое происходят мгновенно и только в заранее фиксированные моменты времени шаги, которые можно пронумеровать. Таким образом в системе протекает случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем.

*ОПР.*

Марковский случайный процесс с дискр. сост-ми и дискр. Временем называют **ДИСКРЕТНОЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПЬЮ** или **ЦЕПЬЮ МАРКОВА.** Обозначим через Ski событие, состоящее в том, что на k-том шаге система будет находиться в состоянии Si.(K=1,2.., I=1..n)

*ОПР.*

Вероятность события Ski, состоящего в том, что система на k-ом шаге будет находиться в сост. Si называют **вероятностью i-го состояния на k-ом шаге и обозначают Pi(k).** Вероятности состояния системы в совокупности образуют вектор P(k)=(P1(k),P2(k),..,Pn(k))

*ОПР.*

Вектор P(0)=P1(0),P2(0),..,Pn(0), Где Pi(0) –вероятность появления сост. Si в начальном испытании, называют **вектором начальных вероятностей**.

Очевидно, что на любом шаге процесс может находиться в одном и только одном из n возможных состояний S1,S2,..,Sn, следовательно при любом k событие Sk1,Sk2,..Skn будут единственно возможны и несовместны, то есть образуют полную группу. По этому для каждого шага k имеет место равенство **P1(k)+P2(k)+..+Pn(k)=1**.

*ОПР.*

Переходными вероятностями называют вероятности перехода системы из любого состояния в любое состояние за один шаг. Некоторые из переходных вероятностей могут быть равны нулю, если непосредственный переход за один шаг невозможен.

*ОПР.*

Марковскую цепь называют однородной, если переходные вероятности не зависят от номера шага. В противном случае марковскую цепь называют **неоднородной**. Будем считать марковскую цепь однородной. Обозначим через Pij вероятность перехода системы **за один шаг** из состояния Si в сост Sj.

*ОПР.*

Матрицей перехода за один шаг называют матрицу, которая содержит все переходные вероятности этой системы за один шаг.

П1 =(P11, P12,..P1n

P21,P22,..P2n

P31, P32,..,Pnn)

Некоторые из переходных вероятностей Pij могут быть равны нулю, что означает невозможность перехода системы из i-го сост. в j-е за один шаг. По главной диагонали матрицы состоят вероятности того, что система останется в том же состоянии. В каждой строке матрицы помещены вероятности событий, образующих полную группу, поэтому сумма всех Pij=1.

Марковскую цепь изображают в виде графа переходов, вершина которого соответствует состоянию цепи, а дуги – переходы между ними. Вес дуги, связывающей вершины Si с Sj равен вероятности Pij.

# Равенство Маркова

Обозначим через Pij(k) вероятность перехода системы из сост Si в сост Sj за k шагов.

При k=1 получим Pij(1)=Pij

Поставим задачу: зная переходные вероятности за один шаг, найти вероятности перехода из Si в Sj за k шагов, т.е. найти Pij.

Введем в рассмотрение промежуточное состояние Sr. Будем считать, что из первоначального сост Si за n шагов система перейдет в промежуточное сост Sr с вероятностью Pir(m). После чего за оставшееся количество k-m система перейдет из промежуточного сост Sr в конечное сост Sj с вероятностью Prj(k-m).

## Теорема:

Пусть событие А может произойти только при условии появления одного из событий H1, H2,..Hn, образующих полную группу т.к. заранее неизвестно, какое именно из этих событий наступит, их называют гипотезами. Тогда вероятности наступления события А равно P(A)=P(H1)\*P(A)+P(H2)\*P(A)+..+P(Hn)\*P(A).

Введем обозначения: А – за k шагов система перейдет из сост Si в сост Sj. Следовательно вероятность события P(A)=Pij(k). Hr – за m шагов система перейдет из сост Si в сост Sr. Следовательно P(Hr)=Pir(m).

P(A) при Hr – условная вероятность наступления события А при условии, что имело место условие Hr за k-m шагов система перейдет из промежуточного состояние Sr в конечное сост Sj. P(A)=Prj(k-m).

Pij(k)=Сумма при n=1..n (Pir(m)\*Prj(k-m))

Покажем, что зная переходные вероятности за один шаг, т.е. зная матрицу П1 можно найти переходные вероятности за два шага, т.е. матрицу П2, далее П3 и тд. Для этого положим в равенстве Маркова k=2 и m=1. Pij(2)=Sum r=1..n (Pri(1)\*Prj(2-1))

Pij(2)=Sum r=1..n (Pir\*Prj) . По этой формуле можно найти все вероятности Pij(2), следовательно и матрицу П2.

П2=П1\*П1=П1^2 . Положив в равенстве Маркова K=3 и m=2 аналогично получим, что П3=П1\*П2, т.е. П1^3.

Пk=П1^k для любого k.

Если известны вектор начального распределения вероятности и матрица переходов вероятности, то можно вычислить вероятности состояния системы для любого шага k.

P(k)=P(0)\*П1^k.

Т.о. Цепь Маркова считается заданной, если:

1) имеется вектор начальных вероятностей, описывающий начальное состояние системы

2) известна матрица перехода вероятностей

Пример:

Ставка 2%, 3%, 4% может изменяться только в начале следующего квартала. Анализ работы в предыдущие годы показал, что изменение переходных вероятностей с течением времени пренебрежимо мало. Определить вероятность состояния банка на конец текущего года, если в конце прошедшего ставка = 3%, а матрица переходных вероятностей П1 имеет вид:

П1=(0,4 0,4 0,2

0,2 0,5 0,3

0,1 0,3 0,6)

S1= 2% P(4)- ? (квартал - 4)

S2=3% P(0)= (0 , 1 , 0)

S3=4% P(4)= P(0)\* П1^4=(0,202 , 0,402 , 0,397)

# Классификация состояний Марковской цепи. **Предельные вероятности состояний**

Для эргодических однородных марковских цепей существует стационарный режим при t -> (стремящейся к) бесконечности. При стационарном режиме вероятности состояний стремятся к некоторым установившимся значениям – предельным вероятностям, которые постоянны и не зависят от начального состояния системы.

## Теорема

Если **число** состояний системы **n** конечно и из каждого состояния можно перейти в любое другое за конечное время, то существуют предельные вероятности состояний Pi = lim(Pi(t)) при t->бескон. ,i=1..n;

Сумма предельных вероятностей Pi дает 1.

Предельные вероятности определяют среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии.

Для того, чтобы вычислить предельные вероятности состояний достаточно в системе уравнений Колмогорова приравнять все левые части (производные) к нулю, поскольку в установившемся режиме все вероятности состояний постоянны. В результате получим системы однородных линейных уравнений.

-∑ (от j=1,j != n до n ) Lij \* Pi + ∑ (от j=1,j!= i до n) Lji \* Pj =0, i=1..n

Пример. Система имеет 4 состояния, известны интенсивности переходов. Нужно построить систему уравнений Колмогорова .

{

{P`1(t) = -2\*P1(t) – 3\*P1(t)+1\*P3(t)

{P`2(t) = -1\*P2(t) + 2\*P1(t) + 2\*P3(t)

{P`3(t) = -1\*P3(t) – 2\*P3(t) + 3\*P1(t) + 2\*P4(t)

{P`4(t) = -2\*P4(t) + 1\*P2(t)

{∑ (от i=1 до n=4) Pi(t)=1

{

{-5P1+P3=0

{-P2+2P1+2P3=0

{-3P3+3P1+2P4=0

{-2P4+P2=0

{P1+P2+P3+P4=1

{

Ответ: P1 =1/24, P2=1/2, P3=5/24, P4= ¼

# Процессы «гибели и размножения»

*Опр.*

Непрерывная марковская цепь называется процессом гибели и размножения, если ее граф состояний можно представить в виде одной цепочки, в которой каждое из средних состояний S1, S2, … , Sn-1 связаны прямой и обратной связью с каждым из средних состояний, а крайнее состояние S0 и Sn только с одним соседним состоянием. В общем случае граф состояния процесса гибели и размножения имеет следующий вид:

**Фото в телефоне**

Пусть для всех пар состояний известны интенсивности переходов. Составим систему равнений Колмогорова.

P`0(t) = -L01\*P0(t) +L10\*P1(t)

P`1(t) = -L12\*P1(t) + L21\*P2(t) – L10\*P1(t)+L0\*P0(t)=L01\*P0(t)-(L10+L12)\*P1(t) + L21\*P2(t)

P`2(t) = -L21\*P2(t) –L23\*P2(t) + L12\*P1(t) + L32\*P3(t) = L12\*P1(t) – (L21+L23)\*P2(t) + L32\*P3(t)

P`k(t) = -Lk,k-1\*Pk(t) – Lk,k+1\*Pk(t)+Lk-1,k\*Pk-1(t)+Lk+1,k\*Pk+1(t)

P`n(t) = -Ln,n-1\*Pn(t)+Ln-1,n\*Pn(t)

В стационарном режиме при t-> беск. имеем: Pi(t)->Pji ; P`i->0

-L01\*P0 + L10 \* P1=0

L01\*P0-(L10+L12)\*P1+L21\*P2=0

L12\*P1 – (L21+L23)\*P2+L32\*P3 = 0

…

Lk-1,k \* Pk-1 – (Lk,k-1 + Lk,k+1)\*Pk + Lk+1,k\*Pk+1=0

…

Ln-1,n\*Pn-1 – Ln,n-1\*Pn=0

{1)**L01\*P0=L10\*P1** (\*)

{2)**L01\*P0** + L21\*P2=**L10\*P1**+L12\*P1

2) L21\*P2=L12\*P1

{n)Ln,n-1\*Pn=Ln-1,n\*Pn-1

{∑(i=1.. n) Pi=1

L01\*P0=L10\*P1

P1=(L01/L10)\*P0

P2=(L12/L21)\*P1

Pk=(Lk-1,k / Lk,k-1)\*Pk-1 = (Lk-1,k / Lk,k-1) \* (Lk-2,k-1 / Lk-1,k-2)\*…\*(L01 / L10). В числителе все L12, L23 .. то есть слева на право, а в знаменателе L21, L10, то если с права на лево.

P0 + P1 + P2 + … + Pn=1

P0 + (L01/L10)\*P0 + (L12 \* L01 / L21 \* L10)\*P0 + … (L01 \* ... \* Ln-1,n / L10 \* … \* Ln,n-1)\* P0 =1

P0 \* ((L01/L10) + (L12 \* L01 / L21 \* L10) + … (L01 \* ... \* Ln-1,n / L10 \* … \* Ln,n-1)) = 1

P0=1 / ((L01/L10) + (L12 \* L01 / L21 \* L10) + … (L01 \* ... \* Ln-1,n / L10 \* … \* Ln,n-1))

Пример.

Найти предельные вероятности состояний для графа следующего процесса гибели и размножения:

∑

**Фото в телефоне**

P0 = 1 + L01/L10 + L01 \* L12 / L10 \* L21 + L01 \* L12 \* L23 / L10 \* L21 \* L32 = 2/3 + 2\*1/3\*2 + 2\*1\*3 / 3\*2\*2 +1= (8+4+6+12)/12=2.5

P0 = 2/5

P1= 2/3 \* 2/5 = 4/15

P2= 2/6 \* 2/5 = 2/15

P3 = 6/12 \* 2/5= 1/5

# Простейший поток заявок

Входящий поток заявок во многом определяет характеристики производительности систем массового обслуживания. По этому правильное описание потока заявок, поступающих в реальную систему в случайные моменты времени, является важной задачей.

**Опр.**

Случайным потоком называется последовательность случайных моментов наступления некоторых событий. (Например, вызов на электронную станцию)

Случайный поток событий по существу является случайным процессом.

Заявки, поступающие в СМО или покидающие ее, образуют случайный поток, который можно изобразить как последовательность точек на оси времени, соответствующих случайным моментам времени получения заявок.

## Достаточное условие эргодичности.

При рассмотрении цепей Маркова важно изучить поведение системы на большом интервале времени, когда число переходов стремится к бесконечности.

Марковские цепи классифицируются в зависимости от возможности переходов из одних состояний в другие.

*ОПР.*

Состояние Sj называют достижимым из состояния Si, если вероятность перехода системы из i в j за конечное число шагов положительна.

*ОПР.*

**Состояния** Si и Sj, достижимые друг из друга, называют **сообщающимися**.

*ОПР.*

Цепь Маркова называют неприводимой, если все ее состояния сообщаются друг с другом.

*ОПР.*

Состояние Si называют возвратным, если вероятность того, что система, выйдя из этого состояния, вернется в него за конечное число шагов, равна 1. Если же эта вероятность меньше 1, то состояние называют **невозвратным**.

*ОПР.*

Возвратное состояние, для которого возвращение возможно лишь через число шагов, кратное d (d!=1), называют **периодическим**.

*ОПР.*

Эргодическим состоянием называют возвратное непериодическое состояние, для которого среднее время возвращение конечно.

*ОПР.*

Эргодическая Марковская цепь – Марковская цепь, все состояния которой являются эргодическими.

Процесс, порождаемый эргодической цепью, начавшись в некотором состоянии никогда не завершается, а последовательно переходит из одного состояния в другое, попадая в различные состояния с разной частотой, зависящей от переходных вероятностей.

*ОПР.*

Состояние Si называют поглощающим, если вероятность перехода из этого состояния в любое другое равна 0, т.е. Pij=1.

Теорема: (достаточное условие эргодичности

Эргодическая Марковская цепь обладает важными свойствами:

При неограниченным увеличением числа шагов, переходные вероятности стремятся к некоторым постоянным числам.

## Теорема:

Если существует такое число m>0, при котором все элементы матрицы Пm переходов за m шагов положительны, то существуют такие постоянные числа Pj (j=1,2..n),что

Lim Pij…

Величины Pj называются предельными или финальными вероятностими системы

Предельные вероятности характеризуют среднюю долю времени, в течение которого система находится в данном состоянии при наблюдении в течение достаточно продолжительного времени. Заметим, что сумма этих вероятностей будет равняться 1. (1) Обозначим эти вероятности через вектор P=(p1,p2,..,pn)

P=P\*П1. (2)

Записанная в матричном виде система (2) является системой линейных уравнений с n неизвестными p1 , p2 , .. , pn. Учитывая условие (1) одно из уравнений системы (2) можно отбросить. Отбросим последнее уравнение и запишим систему уравнений в явном виде:

Фото в телефоне